

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ НА ЭКСТРЕМУМ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ CABRI 3D

Продолжение. Начало статьи см. в № 4 за 2007 г.

Обратимся теперь к задачам оптимизации, в которых правильные призмы и пирамиды связаны друг с другом.

Пример 15. n -гранная призма максимального объема, вписанная в пирамиду

Результаты исследования (рис. 15.1–15.4): высота вписанной n -гранной опти-

мальной призмы равна одной трети высоты пирамиды, независимо от длины стороны основания и высоты пирамиды. Максимальный объем растет вместе с n и стремится к объему цилиндра, вписанного в конус той же высоты (рис. 15.5).

Это верно и для другого способа вписывания призмы (рис. 15.6–15.9).

Задание: Что можно сказать об оптимизации площади поверхности вписанной призмы?

Рассмотрим двойственную задачу:

Пример 16. Правильная пирамида минимального объема, описанная вокруг призмы

Результаты исследования (рис. 16.1–16.4): высота описанной n -гран-

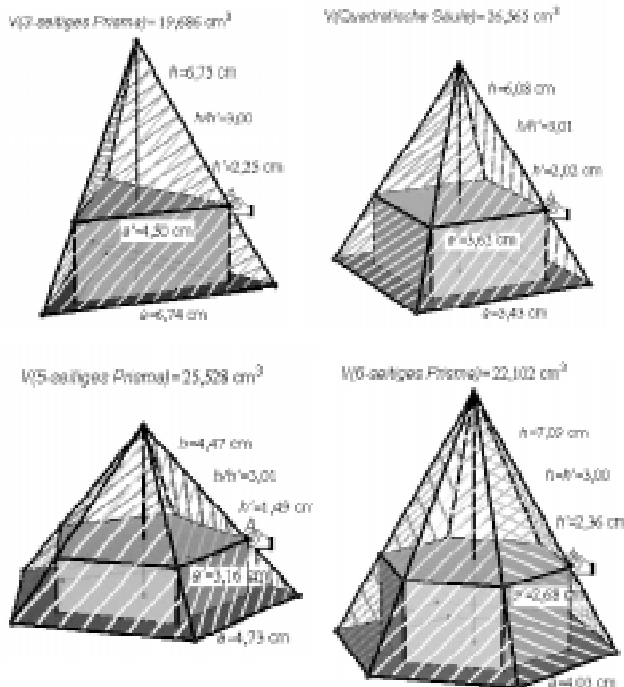


Рис. 15.1–15.4. Призмы максимального объема, вписанные в пирамиду

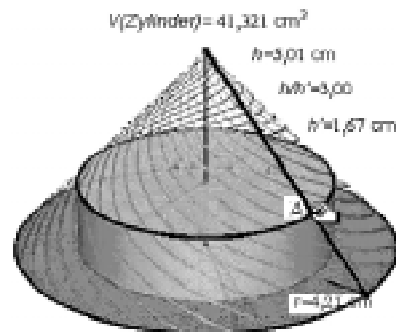


Рис. 15.5. Цилиндр максимального объема, вписанный в конус

ной оптимальной пирамиды равна утроенной высоте призмы, независимо от длины стороны основания и высоты призмы. Минимальный объем убывает при увеличении n и стремится к объему конуса, описанного около призмы той же высоты (рис. 16.5).

Приведем еще один пример задачи на оптимизацию, в которой оптимизируемое тело отличается от рассмотренных выше стандартных геометрических тел.

Пример 17. n -гранная усеченная пирамида максимального объема, вписанная в полушар

Результаты исследования (рис. 17.1–17.4): оптимальная усеченная пирамида имеет одну и ту же высоту при всех n . Максимальный объем растет вместе n и стремится к объему усеченного вписанного конуса той же высоты.

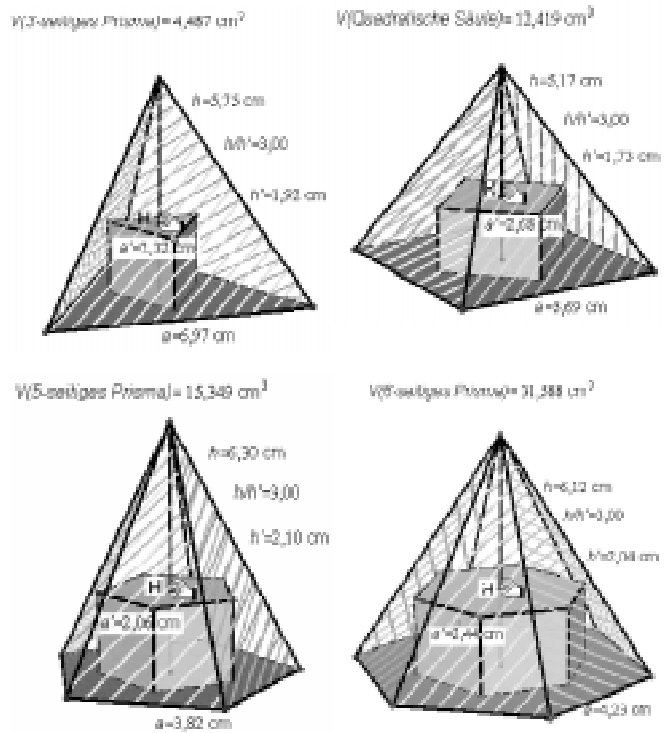


Рис. 15.6–15.9. Призмы максимального объема, вписанные другим способом

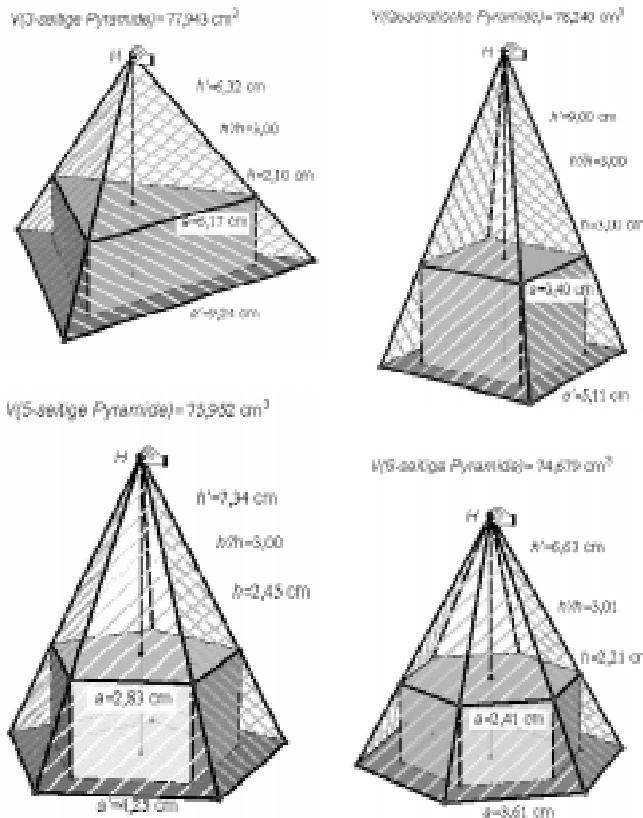


Рис. 16.1–16.4. Пирамиды минимального объема, описанные около призм

В рассмотренных примерах результат исследования был ожидаем с эстетической точки зрения. В следующем примере это не так.

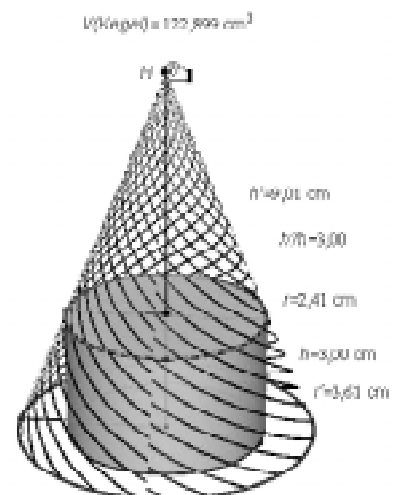


Рис. 16.5. Конус минимального объема, описанный около цилиндра

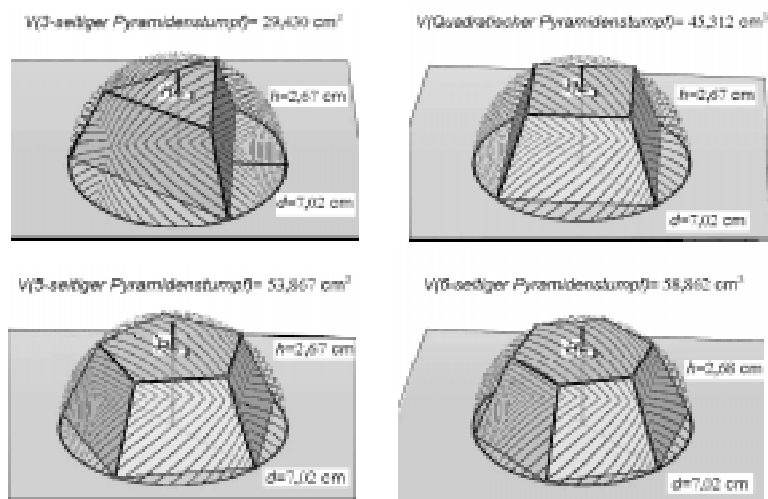


Рис. 17.1–17.4. Вписанная в полушар усеченная пирамида максимального объема

Пример 18. Оптимизация плоского сечения призмы

Оптимизация сечения несимметричной призмы (или пирамиды) является примером задачи оптимизации, решение которой не приводит к правильным формам и не очень просто вычисляется. Например, максимальный объем (площадь поверхности) тела, получаемого вращением плоскости сечения призмы вокруг ее ребра (AB) (рис. 18.1) находится только приближенно; возможно поставить задачу и для другой оси враще-

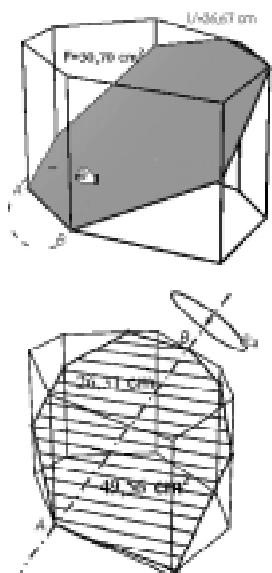


Рис. 18.1–18.2. Оптимизация сечения призмы

ния (рис. 18.2). Сюда можно добавить задачу отыскания кратчайшего пути между двумя точками на поверхности многогранника.

Далее рассмотрим задачи на экстремум, моделирующие в какой-то мере реальные задачи.

Пример 19. Оптимизация картонной коробки без крышки

Нужно сделать такие вырезы в вершинах правильного многоугольника, чтобы из полученной фигуры можно было сделать коробку без

крышки с основанием в виде правильного многоугольника (рис. 19.1–19.4 для $n = 3, 4, 5, 6$). Такие коробки имеют максимальный объем, когда радиус вписанной в основание окружности в два раза больше высоты коробки.

Задание: Каков предел максимального объема при $n \rightarrow +\infty$?

Пример 20. Минимизация площади стеклянного покрытия теплицы.

Нужно построить минитеплицу обычной формы с заданной площадью основания (50

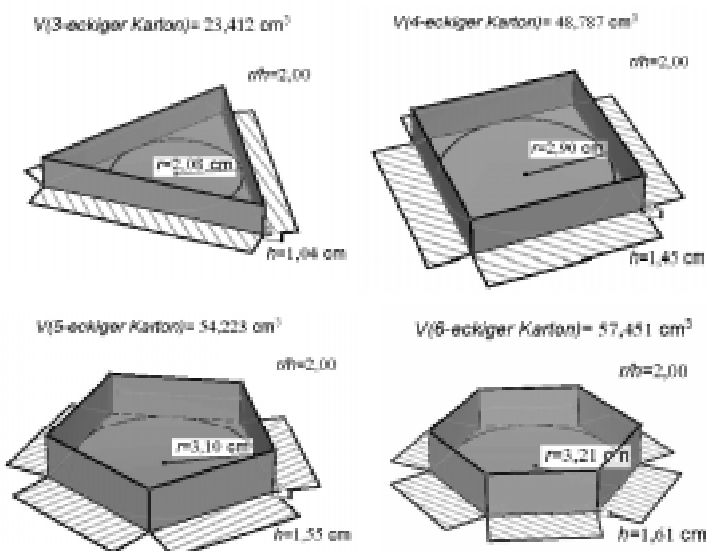


Рис. 19.1–19.4. Коробки максимального объема

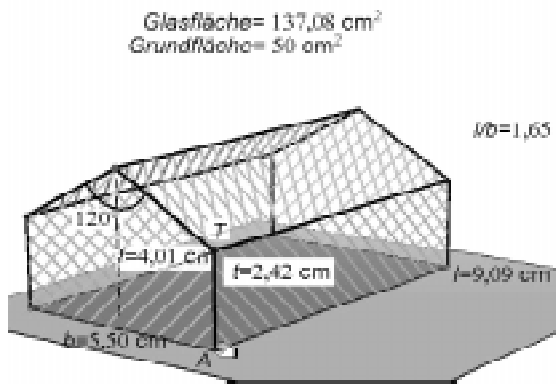


Рис. 20.1 Теплица с минимальным стекляннм покрытием при заданной площади основания

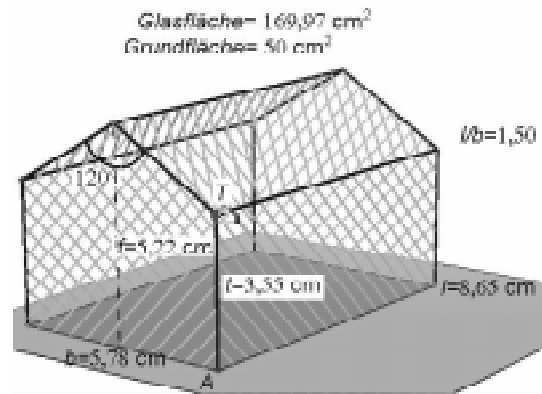


Рис. 20.2. Теплица с минимальным стекляннм покрытием при заданной площади основания (при других данных)

кв.единиц) и расстоянием t от края крыши до земли (2,42 единицы) так, чтобы площадь стекляннй поверхности была минимальной (рис. 20.1). При этих данных минимум достигается, если отношение длины к ширине равно 1,65. Это отношение становится 1,5, если $t = 3,55$ (рис. 20.2) и т. д.

Пример 21. Пчелиные соты

Исходим из правильной 6-гранной призмы. Вписываем в верхнее основание правильнй треугольник ABC и отмечаем на одном из вертикальных ребер призмы подвижную точку P (рис. 21.1). Далее вращаем тетраэдр $PQAB$ вокруг AB на 180° . Четырехугольник $PBP'AP$ является ромбом. Этот ромб и его образы при вращении вокруг вертикальной оси на 120° и 240° образуют «крышу» нового тела, равновеликого с призмой (рис. 21.2–21.3). Мы измеряем площадь поверхности этого тела и варьируем эту величину двигая точку P , пока не достигнем минимума. В результате получаем, что угол при вершине ромба P' равен $109,3^\circ$ (рис. 21.4). Это как раз тот угол, который используют пчелы при строительстве сот. Пчелиные соты состоят из таких ячеек минимальной поверхности, которые пристраиваются с двух сторон к восковой пластинке соответствующей формы (рис. 21.5). Соты в разрезе показаны на рис. 21.6.

Пример 22. Оптимизация расхода материала открытой коробки

Выберем размеры открытой коробки цилиндрической формы с заданным объемом 250 cm^3 так, чтобы расход материала был

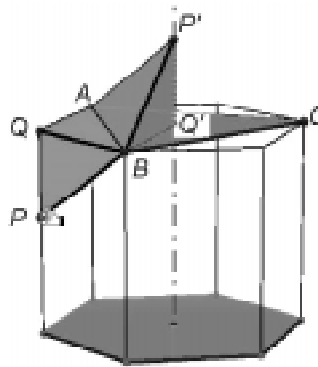


Рис. 21.1

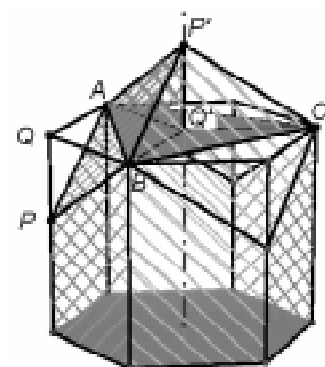


Рис. 21.2

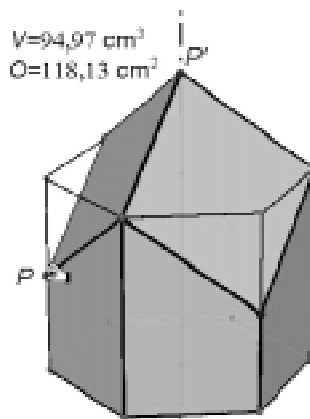


Рис. 21.3

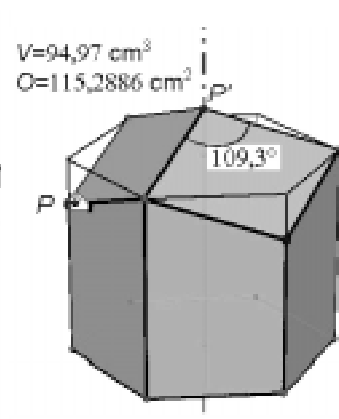


Рис. 21.4

Рис. 21.1–21.4. Минимизация поверхности ячейки пчелиных сот

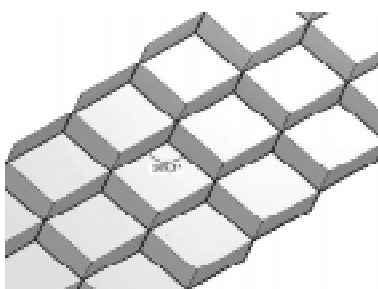


Рис. 21.5

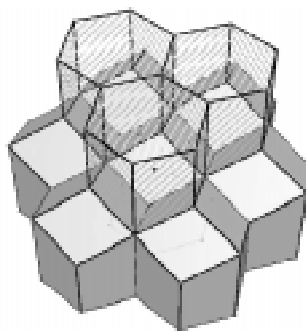


Рис. 21.6. Соты в разрезе

минимален (рис. 22). Оказывается, расход минимален, если высота коробки равна радиусу основания.

Пример 23. Оптимизация цилиндрической бочки по Кеплеру

С помощью градуированного стержня можно измерить, насколько наполнена ци-

$V(\text{Dose}) = 250,00$
 $O(\text{Dose ohne Deckel}) = 174,367$

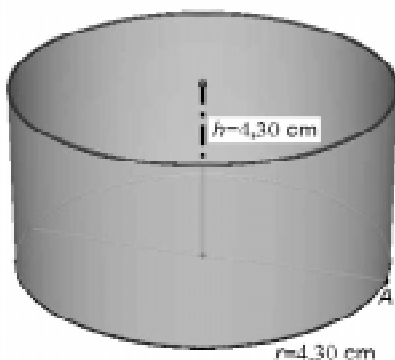


Рис. 22. Коробка оптимального размера

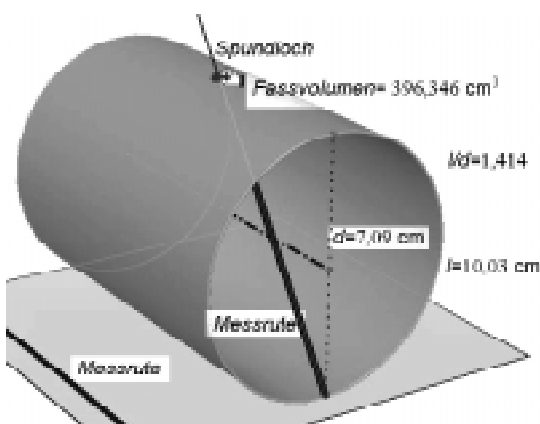


Рис. 23. Бочка наибольшего объема

линдрическая бочка, положенная набок (рис. 22, бочка без дна и крышки). Стержень вводится в бочку через отверстие до упора, затем вытаскивается и по его смоченной части определяется объем жидкости. Градуировка стержня зависит от длины и диаметра бочки. Если шкала на стержне уже задана (отмечена точка максимального наполнения), требуется найти такие размеры бочки, при которых она имеет наибольшую емкость. Варьируя положение стержня, получаем оптимальное отношение длины бочки к ее диаметру: $l/d = \sqrt{2}$; то есть осевое сечение бочки соответствует немецкому промышленному стандарту.

Пример 24. Оптимизация объема конуса при варьировании угла его развертки

Интерпретируя круговой сектор как развернутую боковую поверхность конуса, можно определить угол сектора, при котором соответствующий конус имеет наибольший объем (рис. 24). В этом случае отношение радиуса основания конуса к его высоте равно $\sqrt{2}$, что тоже соответствует промышленному стандарту.

Пример 25. Прохождение стержня наибольшей длины

Определение максимальной длины стержня, который можно «протащить» через коридор, изогнутый в виде прямого угла, при-

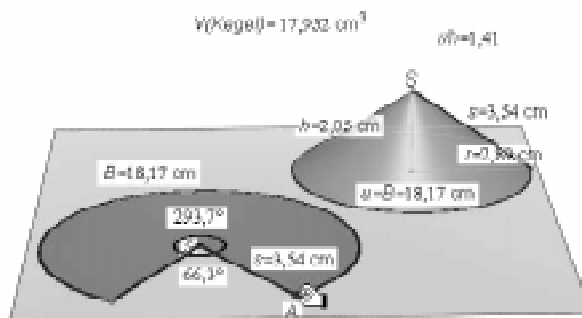


Рис. 24. Конус наибольшего объема

водит к более сложной задаче, которая легко решается путем эксперимента (рис. 25).

В заключение рассмотрим пример задачи на экстремум, которая обычно приводится в курсе аналитической геометрии в пространстве.

Пример 26. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми

Пусть точки A и B лежат на двух скрещивающихся прямых g и h . Переместим точку A по прямой g так, чтобы отрезок AB имел наименьшую длину, при этом заметим, что AB перпендикулярен h (рис. 26.1). Почему? Итак, опустим перпендикуляр из A на h с основанием B и из B на g – перпендикуляр с основанием C (рис. 26.2). Если совместить A и C , то получим отрезок, перпендикулярный g и h (рис. 26.3) и поэтому имеющий наименьшую длину среди всех отрезков с концами на g и h . Почему?

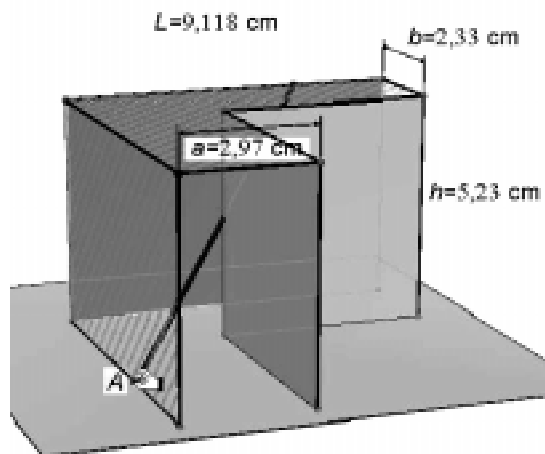


Рис. 25. Оптимальное прохождение стержня

Прямые g и h лежат в плоскостях, перпендикулярных отрезку AB (рис. 26.4). Почему?

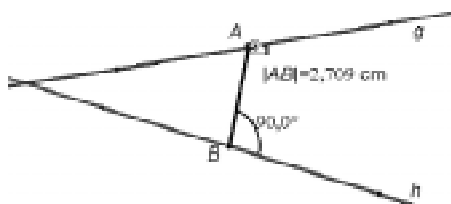


Рис. 26.1

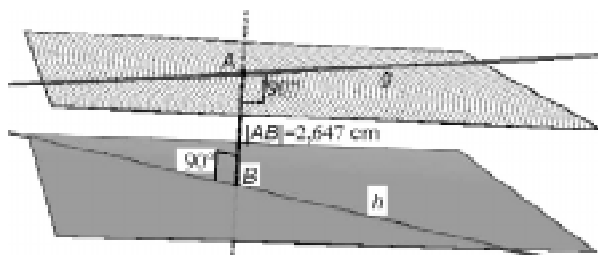


Рис. 26.4

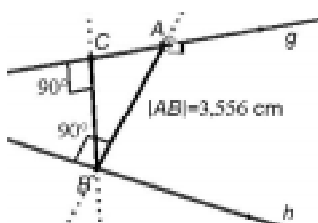


Рис. 26.2

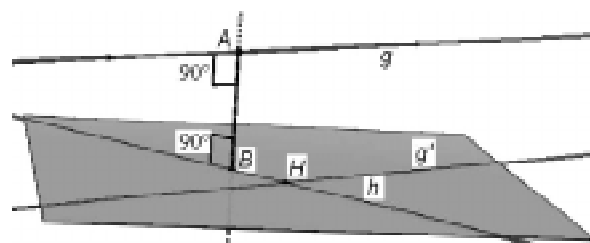


Рис. 26.5

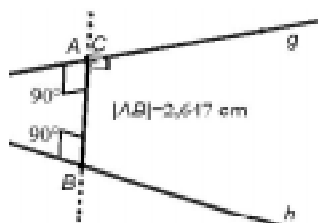


Рис. 26.3

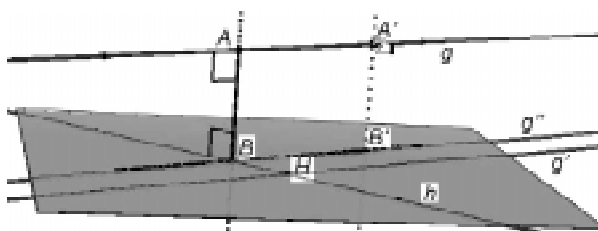


Рис. 26.6

Рис. 26.1–26.3. Решение с помощью эксперимента

Рис. 26.4–26.6. Разработка точной конструкции

Чтобы построить отрезок AB , проводим прямую g' параллельную g через точку H на h . Прямые g' и h лежат в одной плоскости (рис. 26.5). Далее выбираем точку A' на g и опускаем из нее перпендикуляр с основанием B' на эту плоскость. Длина отрезка $A'B'$ – минимальна. Прямая g'' проходит через B' параллельно g и пересекает h в точке B , а точка A служит основанием перпендикуляра, опущенного из B на g (рис. 26.6).

3. ДОПОЛНЕНИЯ

3.1 ИНТЕРАКТИВНЫЕ РАБОЧИЕ ЛИСТЫ

Школьникам, впервые начинающим работать с системой динамической геометрии, предоставляются вместе с соответствующей информацией так называемые «интерактивные рабочие листы» [5; 6], которые могут использоваться и в демонстрационных це-

лях. Эти рабочие листы помогают школьникам в начальный период их экспериментирования с пространственными задачами на экстремум. (В системе Cabri 3D имеется плагин, позволяющий визуализировать пространственные фигуры в офис- или htm- документе, причем сохраняется возможность деформировать фигуры так, как это делается в самой системе.)

Рассмотрим подробнее работу с задачами на экстремум с помощью этих рабочих листов.

Работа с задачами на экстремум в системе динамической геометрии основана на возможности варьировать размеры фигур в режиме «перетаскивания».

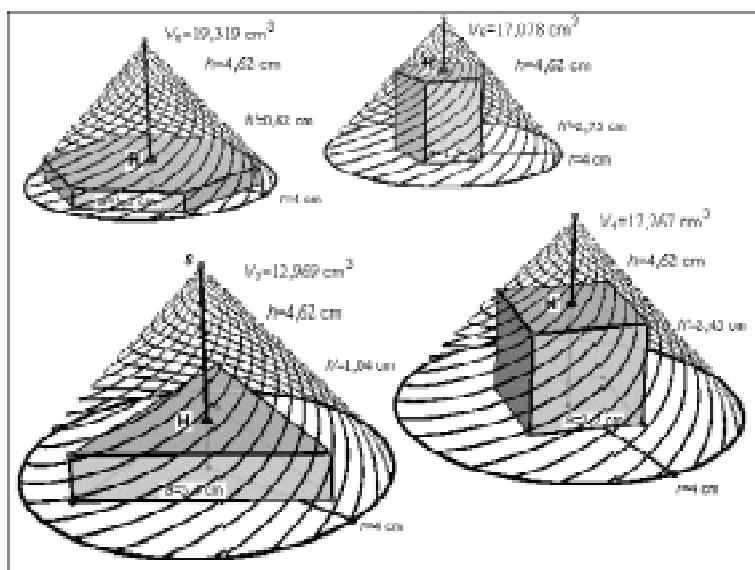
Динамическая работа с задачами на экстремум похожа на простой физический эксперимент.

Исходный материал состоит из геометрической фигуры, на которой указаны точки, которые можно использовать (режим «перетаскивания»)

для варьирования параметров (длин, площадей, объемов, углов). Кроме того, в интерактивных листах экспериментатору даются постановки задач и инструкции по их выполнению. При этом нужно различать использование рабочего листа в системе Cabri 3D и вне ее, например, в интернете. Рис. 27.1 рабочий лист вне Cabri 3D, а рис. 27.2 – возможный вариант работы в Cabri 3D.

Экспериментатор создает протокол, отражающий ход эксперимента и его результаты. Протокол можно создать в электронном виде, где результаты опыта представлены в статической или динамической форме.

Ошибки двух видов могут исказить результаты. С одной стороны, ограниченное разрешение экрана (для



Объем призмы, вписанной в конус

В конус вписаны правильные 3-, 4-, 5- и 6-угольные призмы. Рассмотрите эти фигуры с разных сторон. Перемещая точку H , измените высоту h' и сторону основания a .

- 1) Проследите за изменением объема призм.
- 2) Чему равно отношение высоты конуса к высоте призмы при наибольшем объеме? Используйте калькулятор.
- 3) Измените высоту конуса, двигая точку S . Что происходит с отношением h/h' ?
- 4) Пусть число боковых граней призмы растет. К какой форме приближается призма? К чему стремятся наибольший объем призмы и h/h' ?

Рис. 27.1. Интерактивный рабочий лист (пример)

фиксированного значения зависимой переменной существует не одно, а целый интервал значений независимой переменной) и ограниченная точность компьютерной арифметики, а с другой стороны, ошибки пользователя в процессе проведения эксперимента.

3.2. ОГРАНИЧЕНИЯ МЕТОДА

Задачи на экстремум с более чем одной независимой переменной требуют варьирования большего числа величин путем перетаскивания нескольких точек. В задаче с двумя независимыми переменными экстремум находим приближенно, передвигая точку более или менее случайно по некоторой поверхности. Это демонстрируется в примере с оптимизацией объема параллелепипеда, вписанного в сферу (рис. 28.1–28.2). С учетом симметричности оптимальной фигуры задача сводится к задаче с одной независимой переменной.

3.3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ БЕЗ РЕЖИМА ПЕРЕТАСКИВАНИЯ

Если нужно среди конечного множества фигур выбрать фигуру с экстремальными свойствами, то описанный выше метод не нужен. Достаточно подсчитать интересующую нас величину для каждой фигуры. Режим перетаскивания здесь полезен для исследования того, как меняется исследуемая величина при изменении независимой переменной. Это иллюстрируется следующим примером.

Минимизация упаковочного материала: пакеты в форме параллелепипеда (например, лекарства, спичечные коробки и т. п.) для отправки нужно соединить

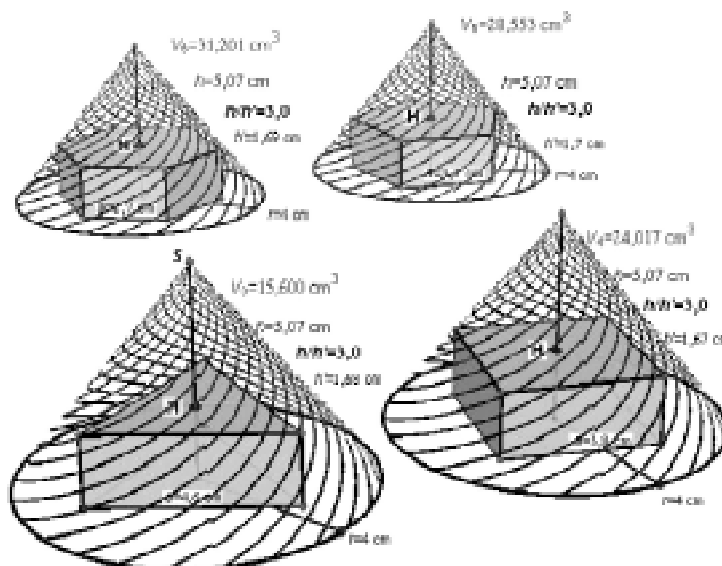


Рис. 27.2. Интерактивный рабочий лист: показан итог работы

в блоки по 10 (или n) штук и обернуть в упаковочный материал. Каким должен быть блок, чтобы расход материала был наименьшим?

На рис. 29 показаны все возможные способы образования блока из 10 пакетов.

Результаты исследования: Если $b \leq l$, то, варьируя l и h , получаем при $h < b$ оптимальный вариант 6; если h между b и l , то оптимален вариант 8; для $h > l$ получим вариант 9 и т. д. Расход материала минимален, когда сумма трех разностей, образованных из трех величин b, l, h , минимальна, то есть когда форма блока наиболее сферична.

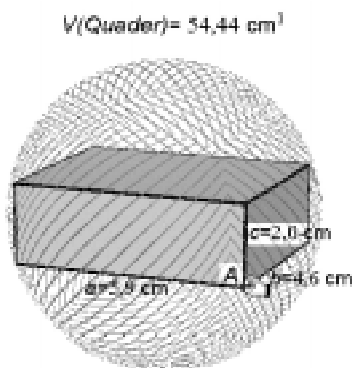


Рис. 28.1

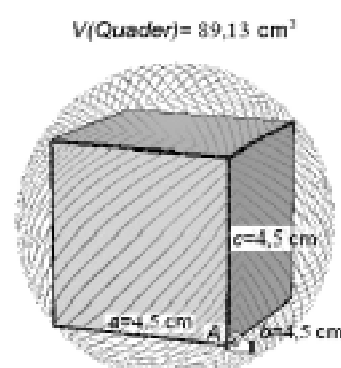


Рис. 28.2

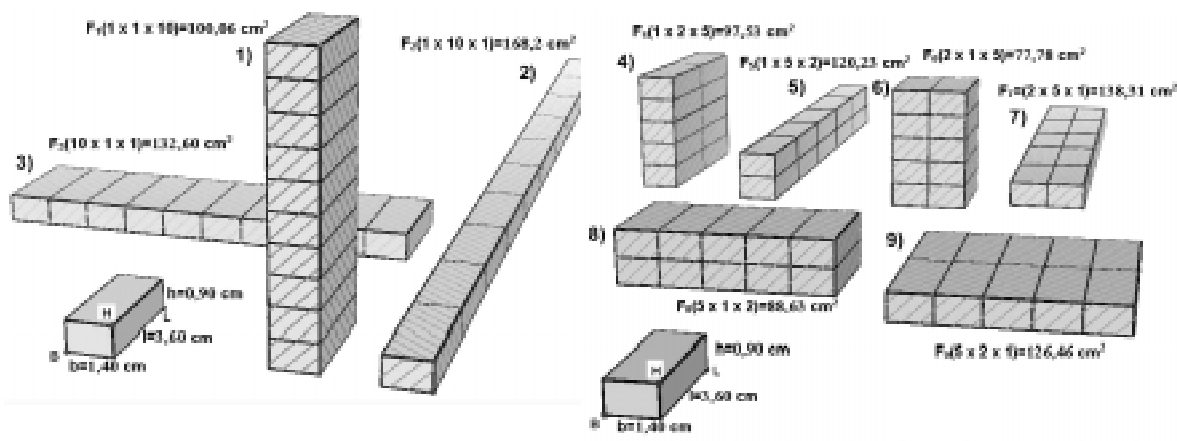


Рис. 29. Минимизация упаковочного материала

Литература

1. Bainville E., Laborde J.-M. (2005/2006): Cabri 3D 2.0. (Software). Grenoble: Cabrilog. Deutsche Version, bearbeitet von H. Schumann, zu beziehen von: www.cotec.de
2. Gusev V et al. (1988): Solving Problems in Geometry. Moscow: Mir Publishers.
3. Pylya G. (1962): Mathematik und Plausibles Schliessen. Band 1: Induktion und Analogie in der Mathematik. Basel: Birkhäuser.
4. Schumann H. (1997): Neue Standards für das Lösen geometrischer Berechnungsaufgaben durch Computernutzung. Alter Wein – in neuen Schläuchen? In: MNU. Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht. 50 (3). S. 172–175.
5. Schumann H. (1998): Interaktive Arbeitsblätter für das Geometrielernen. In: Mathematik in der Schule 36(10). S. 562–569.
6. Schumann H. (1998): Geometrische Extremwertaufgaben in dynamischer Behandlung. In: ZDM Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 30(6). S. 215–223.
7. Schumann, H. (2000): Computerisierte Behandlung funktionaler Beziehungen an geometrischen Figuren. In: Mathematik in der Schule, 38(2). S. 109–119.
8. Schumann H. (2000): Computerunterstützte Bearbeitung geometrischer Extremwertaufgaben. Hildesheim: Franzbecker.
9. Strubecker K. (1967): Einführung in die Höhere Mathematik. Band II. München: Oldenbourg.
10. Winter H. (1989): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Braunschweig: Vieweg.



Наши авторы, 2007
Our authors, 2007

Prof. Dr. Heinz Schumann
Faculty III, Mathematics/Informatics,
University of Education Weingarten
D-88250 Weingarten, Germany
schumann@ph-weingarten.de

Перевод М. Юдовина